4. С т о л я р о в А.В. О фундаментальных объектах регулярной гиперполосы // Известия вузов. Матем. 1975. № 10. С.97-99.

5. С т о л я р о в А.В. Условие квадратичности регулярной гиперполосы // Известия вузов. Матем. 1975. № 11. С.106-108.

6. С т о л я р о в А.В. О двойственной геометрии сетей на регулярной гиперполосе // Известия вузов. Матем. 1977. № 8. С.68-78.

7. С т о л я р о в А.В. Дифференциальная геометрия полос // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1978. Т.10. С.25-54.

8. С т о л я р о в А.В. Двойственные нормальные связности на регулярной гиперполосе // Известия вузов. Матем. 1985. № 9. С.72-75.

9. О с т и а н у Н.М. О геометрии многомерной поверхности проективного пространства // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1966. Т.1. С.239-263.

10. С т о л я р о в А.В. О внутренней геометрии поверхности Картана // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб. научн. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1976. Вып.7. С.111-118.

11. С т о л я р о в А.В. Двойственная теория регулярной гиперполосы $H_m \subset P_{n,m}$ // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1988. Вып.19. С.88-93.

12. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр. Моск. матем. о-ва. 1953. Т.2. С.275-382.

13. П о п о в Ю.И. Общая теория регулярных гиперполос: Уч. пособие / Калинингр. ун-т. Калининград, 1983. 82с.

14. Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1976. 432с.

15. Ч а к м а з я н А.В. Связность в нормальных расслоениях нормализованного подмногообразия V_m в P_n // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1978. Т.10. С.55-74.

16. Ч а к м а з я н А.В. Нормальная связность в геометрии подмногообразий. Ереван, 1990. 116с.

17. Cartan E. Les éspaces á connexion projective // Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу. 1937. Вып.4.

С.147-159.

18. Л а п т е в Г.Ф., О с т и а н у Н.М. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1971. Т.3. С.49-94.

19. С т о л я р о в А.В. О двойственной геометрии сетей и полярно сопряженных конфигурациях на гиперповерхности // Известия вузов. Матем. 1972. № 4. С.109-119.

УДК 514.76

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИНВАРИАНТАХ ВЕКТОРНОГО РАССЛОЕНИЯ С ТРИПЛЕТНОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

Г.Ш.Т о д у а

(Тбилисский государственный университет)

Одно из центральных мест в геометрических исследованиях занимает теория дифференциальных инвариантов, начало которой создали К.Гаусс, Б.Риман, Т.Томас и др. Американский математик О.Веблен впервые доказал так называемые теоремы о замене и приведения для случая пространств аффинной связности без кручения [1]. Далее венгерские математики О.Варга [2], А.Рапчак [3] и их ученики обобщили результаты О.Веблена для более общих пространств (пространств линейных элементов с аффинной связностью, финслеровых пространств и пространств Картана). Б.Л.Лаптев обобщил результаты О.Веблена и венгерских математиков для произвольных пространств опорных элементов [4]. А.П.Урбонас обобщил некоторые теоремы Б.Л.Лаптева для произвольных пространств опорных элементов, но только с плоской линейной связностью [5], а Ю.И.Шинкунасу [6] и Т.Р.Джинчарадзе [7] удалось результаты Б.Л.Лаптева обобщить для пространств опорных элементов с неплоской линейной связностью.

В настоящей работе для векторного расслоения $L_m(V_n)$ $(2m=n(n-1))$ с триплетной связностью [8], тензор кривизны R^{α}_{ij} линейной связности Γ^{α}_{i} которой является частично ковариантно постоянным (равна нулю только ковариантная производная первого рода) и $\det \| R^{\alpha}_{ij} \| \neq 0$, найден новый вариант обобщения схемы О.Веблена, которая широко использована в работах Б.Л.Лаптева, А.П.Урбонаса, Ю.И.Шинкунаса, Т.Р.Джинчарадзе.

Рассмотрим векторное расслоенное пространство $L_m(V_n)$, локальные координаты которого преобразуются по закону:

$$\bar x^i=\bar x^i(x^k),\quad \bar y^\alpha=A^\alpha_\beta(x)\,y^\beta,\quad \det\left\|\frac{\partial\bar x^i}{\partial x^k}\right\|\neq 0,\quad \det\|A^\alpha_\beta\|\neq 0,$$

с объектом триплетной связности $\Gamma^\alpha_i,\ \Gamma^\alpha_{\beta i},\ \Gamma^i_{jk}$ $(i,j,k=\overline{1,n};\ \alpha,\beta,\gamma=\overline{1,m})$, понятие которой приведено в работе автора [8].

Пусть дана параметризированная кривая $(\sigma):\ x^i=x^i(t)$, $y^\alpha=y^\alpha(t)$. Кривую пространства $L_m(V_n)$ будем называть горизонтально-геодезической кривой, если она горизонтальна и ее касательный вектор ковариантно постоянный. Очевидно, что эти кривые являются решением системы

$$\frac{d^2x^i}{dt^2}+\Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}=0,\qquad \frac{dy^\alpha}{dt}+\Gamma^\alpha_k\frac{dx^k}{dt}=0.$$

Решение этой системы с начальными условиями

$$(x^i)_{t=0}=a^i,\quad (y^\alpha)_{t=0}=P^\alpha;\quad \left(\frac{dx^i}{dt}\right)_{t=0}=b^i,$$

можно записать таким образом:

$$x^i=a^i+b^it+\sum_{a=2}^{\infty}\frac{1}{a!}\left(\overset{\circ}{\Gamma}{}^i_{i_1\dots i_a}b^{i_1}\dots b^{i_a}\right)t^a, \qquad (1)$$

$$y^\alpha=P^\alpha-\sum_{a=1}^{\infty}\frac{1}{a!}\left(\overset{\circ}{\Gamma}{}^\alpha_{i_1\dots i_a}b^{i_1}\dots b^{i_a}\right)t^a.$$

Если выполним преобразование $x\to\bar x$, определенное формулами

$$x^i=a^i+\bar x^i-\sum_{a=2}^{\infty}\frac{1}{a!}\overset{\circ}{\Gamma}{}^i_{i_1\dots i_a}\bar x^{i_1}\dots\bar x^{i_a},$$

то в новой системе координат $(\bar x)$ уравнения (1) примут вид

$$\bar x^i=b^it. \qquad (2)$$

Система координат $(\bar x)$ называется нормальной системой координат, соответствующей системе координат (x) и данному элементу (a^i,P^α), если в этой системе координат уравнения путей (σ), проходящих при $t=0$ через данный элемент (a^i,P^α), имеют вид (2), где

$$(b^1)^2+\dots+(b^n)^2\neq 0,\qquad \left(\frac{\partial x^i}{\partial\bar x^k}\right)_0=\delta^i_k.$$

Первым расширением объекта Ω назовем величину, определенную формулой $(\Omega_{,i})_a=(\partial_i\check\Omega-\check\Gamma^\alpha_i\,\partial_\alpha\check\Omega)_0$.

Аналогично определяется k-ое нормальное расширение [4].

Нормальным тензором k-го порядка назовем k-ое расширение дифференциально-геометрического объекта $L^i_{jk}\equiv\Gamma^i_{(jk)}$ и обозначим так:

$$A^i_{jki_1\dots i_k}=L^i_{jk,i_1\dots i_k}.$$

Оказывается, что существуют связи между тензорами кривизны и нормальными тензорами (символ $<i_s>$ определен Ю.И.Шинкунасом [6]):

$$R^i_{jpq}=2A^i_{[q|j|p]},$$

$$A^i_{jpi_1\dots i_{s+1}}=P^i_{jpi_1\dots i_{s+1}}\left(\partial_\alpha L^i_{jp,<i_{s-1}>},\ R^\alpha_{jp,<i_{s-1}>},\ R^i_{jpq,<i_s>},\ N^\alpha_{\beta i,<i_{s-2}>}\right).$$

Т е о р е м а о з а м е н е 1. Пусть $T^{(i)}_{(j)}$ – компоненты тензорного дифференциального инварианта, аргументами которого служат

$$\overset{\Gamma}{\partial}_{<p>}L^i_{jk},\ \overset{\Gamma}{\partial}_{<p>}(\partial_\alpha L^i_{jk}),\ \overset{\Gamma}{\partial}_{<p>}R^\alpha_{jk},\ \overset{\Gamma}{\partial}_{<p>}R^i_{jkq},\ \overset{\Gamma}{\partial}_{<p>}N^\alpha_{\beta k},$$

тогда он может быть выражен следующим образом:

$$T^{(i)}_{(j)}=F^{(i)}_{(j)}\{A^i_{jk<p>},\ \partial_\alpha L^i_{jk,<p>},\ R^\alpha_{jk,<p>},\ R^j_{kiq,<p>},\ N^\alpha_{\beta i,<p>}\},$$

где аргументами являются только тензоры.

Т е о р е м а о з а м е н е 2. Если $T^{(i)}_{(j)}$ – компоненты тензорного дифференциального инварианта, аргументами которого служат

$$\overset{\Gamma}{\partial}_{<p>}\Gamma^i_{jk},\ \overset{\Gamma}{\partial}_{<p>}(\partial_\alpha\Gamma^i_{jk}),\ \overset{\Gamma}{\partial}_{<p>}R^\alpha_{jk},\ \overset{\Gamma}{\partial}_{<p>}R^i_{jkq},\ \overset{\Gamma}{\partial}_{<p>}N^\alpha_{\beta i},$$

то эти аргументы можно заменить следующим образом:

$$A^i_{jk<p>}+K^i_{jk,<p>},\ \partial_\alpha L^i_{jk,<p>}+\partial_\alpha K^i_{jk,<p>},\ R^\alpha_{jk,<p>},\ R^i_{jkq,<p>},\ N^\alpha_{\beta i,<p>},$$

где $K^i_{jk}=-\frac{1}{2}S^i_{jk}$, а тензор R^i_{jpq} построен относительно объекта L^i_{jk}.

Далее методом математической индукции можно доказать следующее.

Т е о р е м а 3. А. n-ое расширение произвольного тензора является полиномом от следующих аргументов:

$$\nabla_{<k_n>}T^{(i)}_{(j)},\ \nabla_{<k_{n-2}>}R^i_{jpq},\ \nabla_{<k_{n-3}>}(\partial_\alpha L^i_{jk}),\ \nabla_{<k_{n-2}>}R^\alpha_{pq},\ \nabla_{<k_{n-4}>}N^\alpha_{\beta i}$$

Б. Нормальный тензор n-го порядка является полиномом от следующих величин:

$$\nabla_{<k_{n-1}>}R^i_{jpq},\ \nabla_{<k_{n-2}>}(\partial_\alpha L^i_{jk}),\ \nabla_{<k_{n-1}>}R^\alpha_{pq},\ \nabla_{<k_{n-3}>}N^\alpha_{\beta i},$$

где ∇_i рассматривается относительно объекта L^i_{jk}.

Т е о р е м а п р и в е д е н и я 1. Каждый дифференциальный (скалярный, тензорный) инвариант векторного расслоения с триплетной связностью, аргументами которого служат величины

$$\overset{\Gamma}{\partial}_{<i_k>}L^i_{jp},\ \overset{\Gamma}{\partial}_{<i_e>}(\partial_\alpha L^i_{jk}),\ \overset{\Gamma}{\partial}_{<i_n>}R^\alpha_{pq},\ \overset{\Gamma}{\partial}_{<i_m>}N^\alpha_{\beta k},$$

является алгебраическим инвариантом от следующих аргументов:

$$\nabla_{<i_{k_1}>} R^i_{jpq}, \quad \nabla_{<i_{\ell_1}>} (\partial_\alpha L^i_{jk}), \nabla_{<i_{n_1}>} R^\alpha_{pq}, \nabla_{<i_{m_1}>} N^\alpha_{\beta k},$$

где

$$k_1 = \max(k-1, \ell-2, n-2, m-2), \quad \ell_1 = \max(k-2, \ell, n-3, m-3),$$

$$n_1 = \max(k-1, \ell-2, n, m-2), \quad m_1 = \max(k-3, \ell-4, n-4, m).$$

Справедливость теоремы следует из теоремы о замене I и теоремы 3.

Т е о р е м а п р и в е д е н и я 2. Каждый дифференциальный (скалярный, тензорный) инвариант векторного расслоения с триплетной связностью, зависящий от следующих аргументов:

$$\overset{\Gamma}{\partial}_{<i_{k_1}>} \Gamma^j_{pq}, \overset{\Gamma}{\partial}_{<i_{k_2}>} (\partial_\alpha \Gamma^j_{pq}), \overset{\Gamma}{\partial}_{<i_{k_3}>} R^\alpha_{pq}, \overset{\Gamma}{\partial}_{<i_{k_4}>} N^\alpha_{\beta i},$$

является алгебраическим инвариантом от аргументов

$$\nabla_{<i_k>} R^j_{kpq}, \nabla_{<i_\ell>} (\partial_\alpha L^j_{pq}), \nabla_{<i_n>} R^\alpha_{pq}, \nabla_{<i_m>} N^\alpha_{\beta i},$$

где

$$k = \max(k_1-1, k_2, k_3-2, k_4-2), \quad \ell = \max(k_1-2, k_2, k_3-2, k_4-3),$$

$$n = \max(k_1-1, k_2-2, k_3, k_4-2), \quad m = \max(k_1-3, k_2-4, k_3-4, k_4).$$

Доказательство этой теоремы следует из теоремы о замене 2 и теоремы 3.

Библиографический список

1. В е б л е н О. Инварианты дифференциальных квадратных форм. М., 1948.

2. Varga O. Az elzo Magyar Matematikai Kongresszus Kozlemenyei, 1950. Akad. Kiado. Budapest, 1952. P.147-162.

3. A. Rapcsak. Theorie der Bahren in Linienelemenmanifaltigkeiten und eine Verallgemeinerung ihren affinen Theorie // Actu scien Math. 1955. V.26. N 3-4. P. 251-265.

4. Л а п т е в Б.Л. Ковариантный дифференциал и теория дифференциальных инвариантов в пространстве тензорных опорных элементов // Уч. зап. / Казанский ун-т. Казань, 1958. Т.118. Кн.4. С.75-147.

5. У р б о н а с А.П. О дифференциальных инвариантах пространства опорных элементов // Тр. семин. кафедры геометрии/ Казанский ун-т. Казань, 1968. Вып3. С.115-133.

6. Ш и н к у н а с Ю.И. О дифференциальных инвариантах пространства опорных линеаров // Лит. мат. сб, 1970. Т.X. № 3. С.611-637.

7. Д ж и н ч а р а д з е Т.Р. Дифференциальные инварианты касательного расслоения / Тбилисский мат. ин-т им. А.Размадзе. Тбилиси, 1988. 21 с. Деп. в БИВУ ГКНТ ГССР 12.08.88, № 449.

8. Т о д у а Г.Ш. Векторные расслоения со связностью // Лит. мат. о-во. Тез. докл. / Вильнюс, 1988. С.190-191.

УДК 514.75

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ВЫРОЖДЕННЫХ КОМПЛЕКСОВ, ПОРОЖДЕННЫХ КВАДРИКОЙ И ТОЧКОЙ

Т.П.Ф у н т и к о в а

(Калининградский государственный университет)

В трехмерном аффинном пространстве рассматриваются вырожденные комплексы [1], порожденные квадрикой Q и точкой P^* причем многообразие квадрик Q - трехмерное, а точек P^* - одномерное. Изучен класс комплексов $(QP^*)_{3,1}$, для которых точка P^* инцидентна квадрике Q, центры квадрик Q образуют поверхность (P), касательная плоскость к которой и касательная к линии (P^*) параллельны в соответствующих точках.

Между образующими элементами комплекса $(QP^*)_{3,1}$ устанавливается соответствие, при котором каждой квадрике Q соответствует единственная точка P^*, полным прообразом которой является конгруэнция квадрик Q_{P^*}. Устанавливается также соответствие между множествами точек (P^*) и (P), при котором каждой точке P^* соответствует на поверхности (P) линия Γ_{P^*}.

Отнесем комплекс $(QP^*)_{3,1}$ к реперу $R=\{A,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$, в котором точка A совмещена с центром P квадрики Q, вектор $\vec{e}_1$ параллелен касательной к линии (P^*) в соответствующей точке P^*, вектор $\vec{e}_2$ направлен по касательной к линии Γ_{P^*} в точке P, конец вектора $\vec{e}_3$ (точка A_3) совмещен с точкой P^*, концы векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ (точки A_1, A_2) инцидентны квадрике Q.

Квадрика Q в репере R задается уравнением

$$(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2-2\alpha x^1x^2-2\gamma x^2x^3-1=0. \qquad (1)$$

Учитывая, что многообразие квадрик Q трехмерное, а точек P^* - одномерное, выберем $\omega^1, \omega^2, \omega^2_2$ в качестве базисных форм комплекса, обозначив их соответственно $\theta^1, \theta^2, \theta^3$.

Система уравнений Пфаффа комплекса $(QP^*)_{3,1}$ имеет вид: